Introduction Vulgarisée au Transport Optimal

Eloi Tanguy, Université Paris Cité, CNRS, MAP5, F-75006 Paris, France

30 Août 2025

Abstract

Nous introduisons les concepts élémentaires du Transport Optimal, avec vocation d'accessibilité au plus grand public. Nous présentons le problème d'assignement de Monge, y compris dans le cas particulier uni-dimensionnel, ainsi que sa généralisation: le problème de Kantorovich. Finalement, nous considérons quelques cas d'application accessibles.

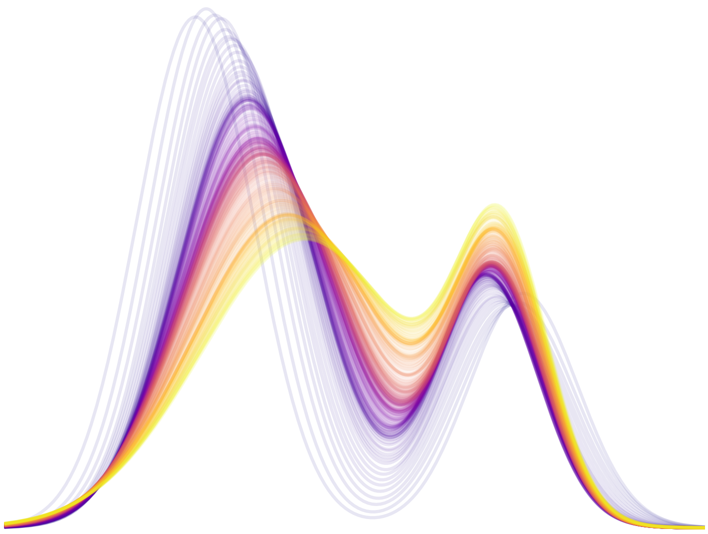


Table des Matières

1 Généralisation du Principe de Moindre Effort

Introduit pour la première fois par Gaspard Monge en 1781 [Mon81], le Transport Optimal (OT) se formule comme un problème de déplacement depuis une source vers une cible. Nous verrons qu'il s'agit d'une généralisation du principe de moindre effort ou de plus court chemin. L'idée du principe du moindre effort consiste à minimiser la coût de déplacement depuis un point de départ A vers un point d'arrivée B. Pour la distance naturelle dans l'espace, le chemin de distance minimale est simplement la ligne droite, mais on s'intéresse également à d'autres types de coûts, par exemple prenant en compte l'effort de déplacement, comme on l'illustre dans la Figure 1.

En Transport Optimal, on considère que le chemin de moindre coût entre chaque paire de points est connu, et on s'intéresse maintenant à la question de déplacer plusieurs personnes depuis plusieurs points de départ vers plusieurs points d'arrivée, en minimisant l'effort collectif. La question devient alors quelle personne envoyer vers quel point d'arrivée: il s'agit d'un problème d'assignement. Dans la Figure 2, nous considérons un exemple simple où Alice et Bob doivent se déplacer depuis leurs points de départ respectifs vers deux arrivées différentes.

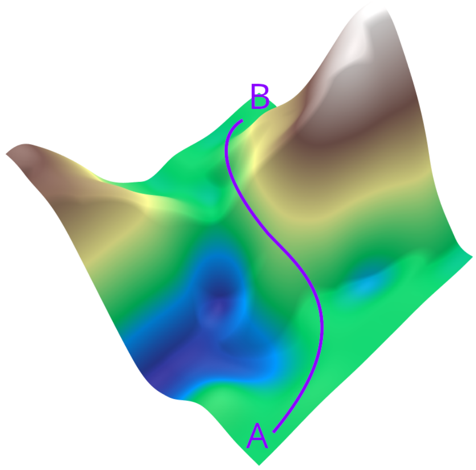


Figure 1: *Pour se déplacer du point A au point B en minimisant l'effort (de nage dans le lac ou de monter une pente), il est préférable de suivre la ligne courbe présentée que de prendre la ligne droite.*

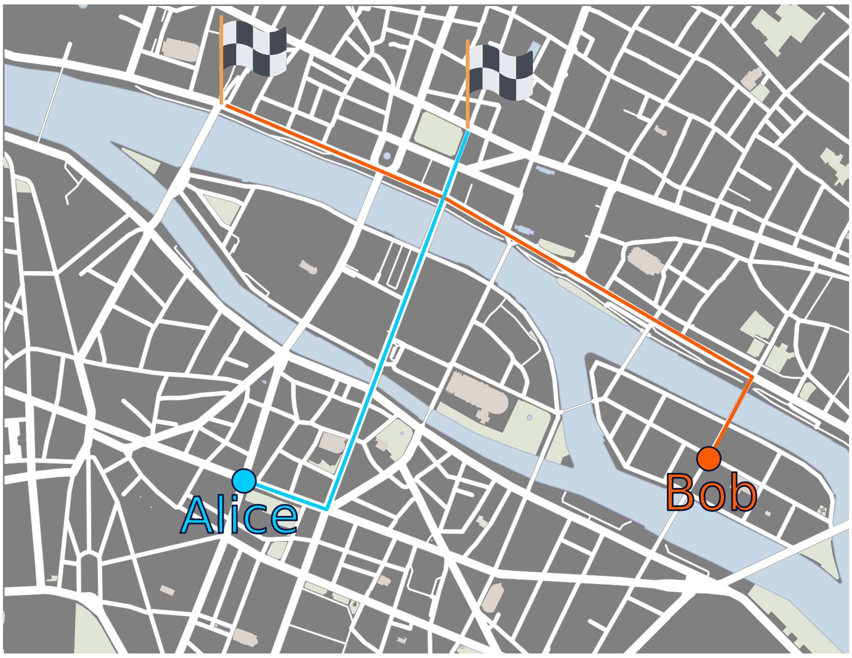


Figure 2: *Plan (peu efficace) de transport de deux personnes (Alice et Bob) vers deux destinations.*

L'assignement proposé dans la Figure 2, n'est pas optimal, en revanche, le seul autre assignement possible (illustré dans la Figure 3) l'est.

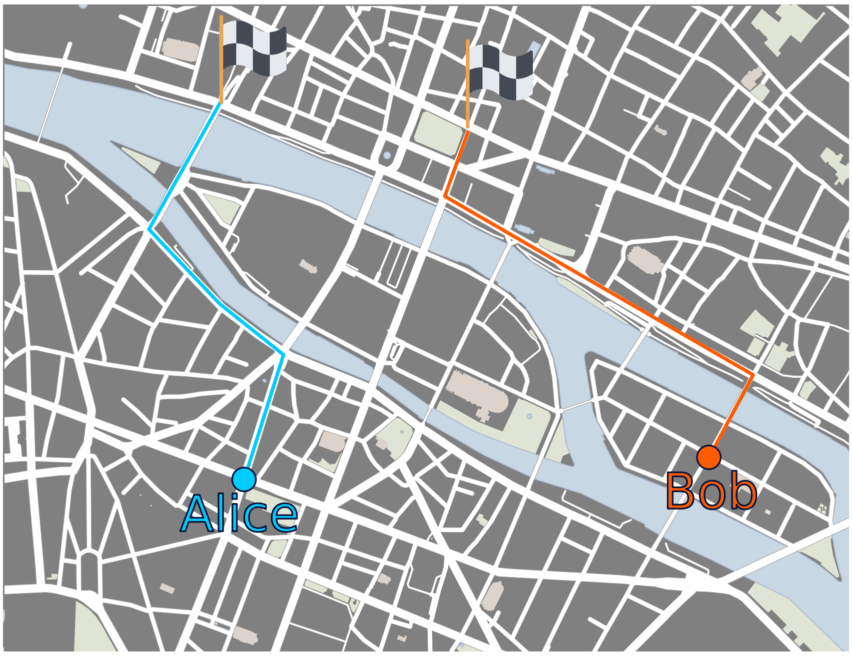


Figure 3: *Plan (optimal) de transport de deux personnes (Alice et Bob) vers deux destinations.*

2 Le Problème de Monge

La formulation de Monge du Transport Optimal consiste à déterminer un assignement de déplacement depuis n points de départ vers n points d'arrivée. Une des illustrations les plus célèbres de ce problème ([Vil09], Page 42) concerne un problème de répartition de baguettes de pain depuis des boulangeries vers des domiciles. Chaque boulangerie détient un certain nombre de baguettes (indiscernables), et chaque maison en demande un certain nombre, de sorte que l'offre totale soit égale à la demande totale. Connaissant le coût de déplacer une baguette depuis chaque boulangerie vers chaque domicile, l'objectif est d'assigner toutes les baguettes de sorte à toutes les livrer et que chaque domicile reçoive la quantité demandée, tout en minimisant le coût total de livraison. Pour simplifier, nous considérons le cas où le coût de livraison est simplement la distance à vol d'oiseau entre la boulangerie et le domicile. Nous illustrons deux assignements possible pour une configuration avec $n = 5$ baguettes dans la Figure 4.

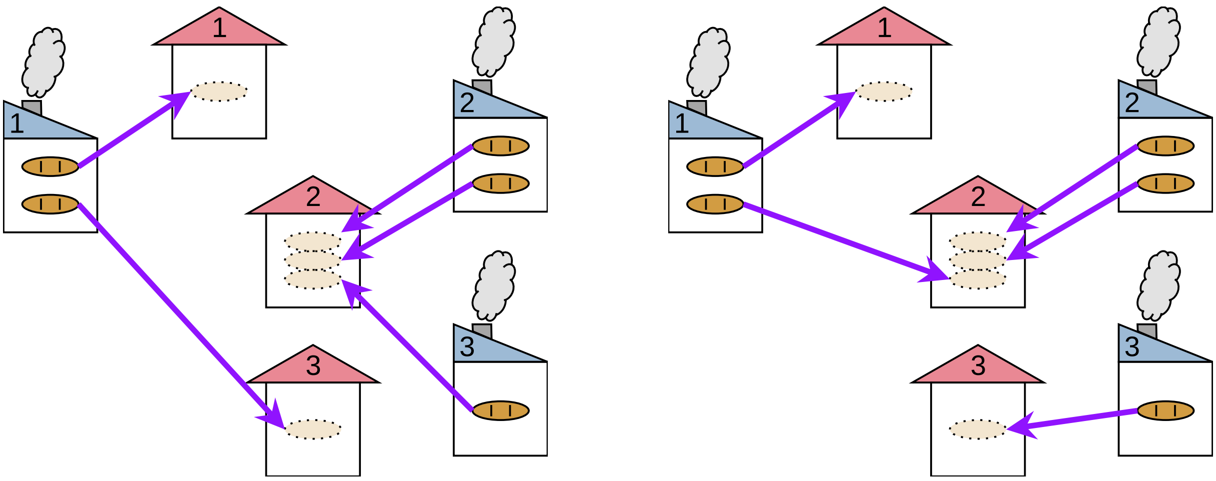


Figure 4: *Nous considérons deux boulangeries (bâtiments à toits bleus avec cheminée) et trois maisons (bâtiments à toits rouges). Nous observons deux assignements possibles pour déplacer les baguettes de sorte à satisfaire la demande. La proposition de droite est meilleure que celle de gauche car la boulangerie 1 est plus proche de la maison 2 que de la 3, et de plus la boulangerie 3 est plus proche de la maison 3 que de la 2.*

Même dans le cas où chaque boulangerie ne produit qu'une baguette et que chaque maison n'en demande qu'une, le problème de Monge peut avoir plusieurs solutions optimales, comme en témoigne l'exemple de la Figure 5.

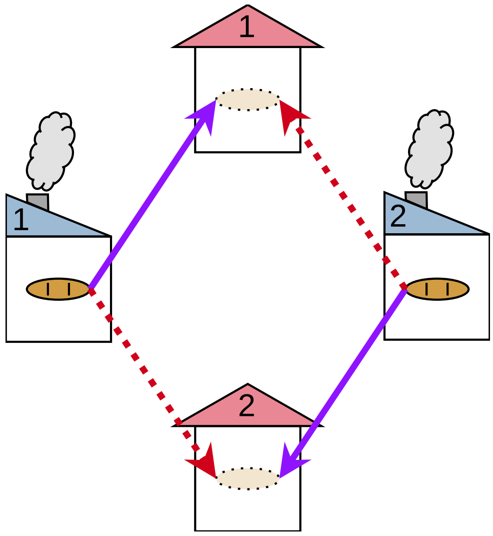


Figure 5: *Dans cet exemple, les deux assignements possibles (Flèches en trait violet plein, et flèches en trait rouge pointillé) ont le mêmes coût, et sont donc optimaux. Cela est dû au fait que les distances entre boulangeries et maisons sont les mêmes.*

Une fois un appariement optimal déterminé, le coût de déplacement, appelé coût de transport optimal, est donné par la moyenne des coûts de déplacements entre chaque source et sa cible. Nous illustrons ce calcul dans un cas simple présenté dans la Figure 6.

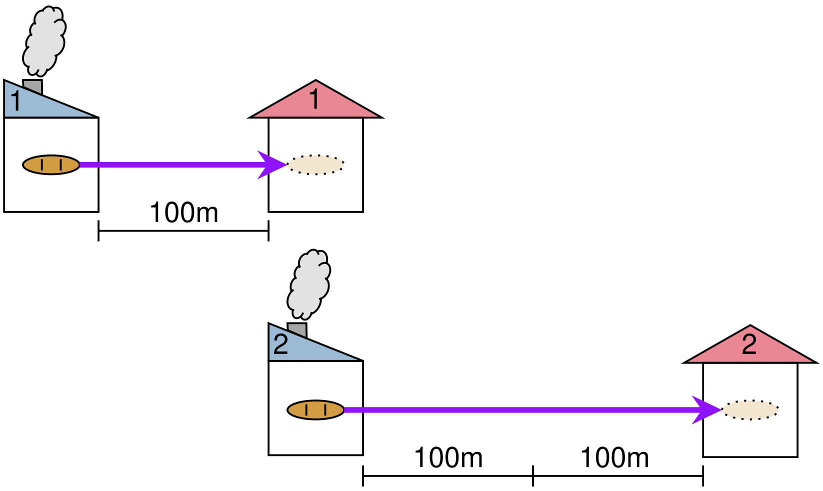


Figure 6: *Illustration d'un assignement optimal déplaçant une baguette sur 100m depuis la boulangerie 1 vers la maison 1, et une autre baguette sur 200m depuis la boulangerie 2 vers la maison 2.*

Nous calculons le coût de transport optimal dans l'exemple de la Figure 6: il s'agit de la moyenne des distances parcourues par les baguettes, soit:

$$\begin{aligned}\text{Coût-Monge}\Big(\text{boulangeries}, \text{maisons}\Big) &= \frac{1}{2} \times \text{distance}\Big(\text{boulangerie } 1, \text{maison } 1\Big) \\ &+ \frac{1}{2} \times \text{distance}\Big(\text{boulangerie } 2, \text{maison } 2\Big) \\ &= \frac{100 + 200}{2}\text{m} = 150\text{m}.\end{aligned}$$

3 Le Cas Uni-Dimensionnel

Dans le cas particulier où les objets à déplacer restent sur une même ligne (le problème est dit "uni-dimensionnel"), il est possible de trouver une solution au problème de Monge en effectuant l'appariement dans l'ordre de la gauche vers la droite. Pour illustrer ceci, nous considérons l'exemple où le problème consiste à déplacer des livres (indiscernables) depuis une première configuration vers une autre sur une étagère, comme présenté dans la Figure 7. Nous considérons toujours le cas où le coût de déplacement est encore la distance entre le point de départ et le point d'arrivée.

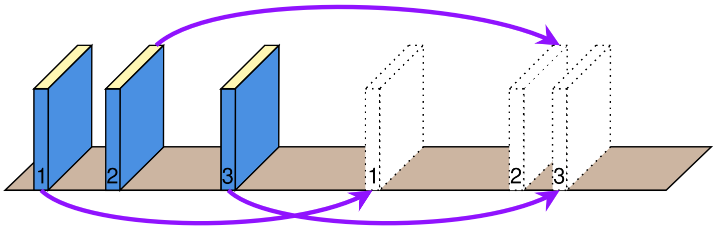


Figure 7: *Ici l'objectif est de déplacer les trois livres à gauche vers les trois emplacements en pointillés à droite. Dans ce cas précis, nous pouvons déterminer un assignement optimal en déplaçant le livre le plus à gauche vers l'emplacement le plus à gauche, puis le livre suivant vers l'emplacement suivant, et enfin le dernier livre vers le dernier emplacement.*

La solution "par tri" présentée dans la Figure 7 est optimale car si un assignement présente une inversion (voir la Figure 8), alors rectifier l'inversion diminuera toujours le coût total de l'assignement (au sens large: le coût peut rester inchangé). Nous illustrons ce principe d'amélioration dans la Figure 8.

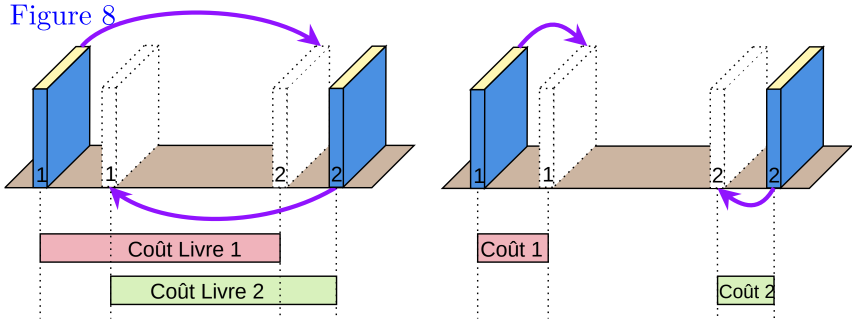


Figure 8: *A gauche, nous voyons un assignement avec une inversion, car le livre le plus à gauche est envoyé sur celui le plus à droite. A droite, nous intervertissons l'assignement, de sorte à associer les livres dans l'ordre de gauche à droite. On observe que le coût de l'assignement, représenté par la longueur des rectangles colorés sous l'étagère, est diminué.*

Dans certains cas, ce processus d'amélioration ne change pas le coût total, comme dans l'exemple de la Figure 9. On observe dans ce cas-ci plusieurs assignements optimaux.

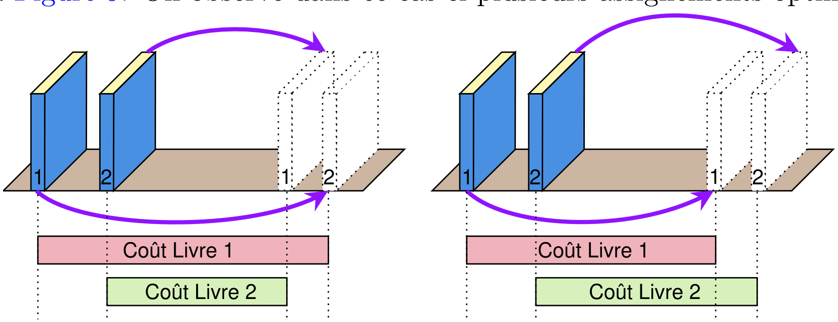
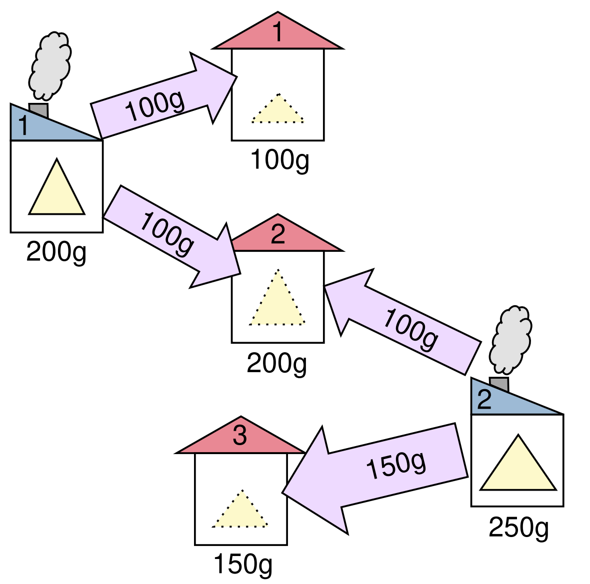


Figure 9: *A gauche, nous voyons un assignement avec une inversion, car le livre le plus à gauche est envoyé sur celui le plus à droite. A droite, nous intervertissons l'assignement, de sorte à associer les livres dans l'ordre de gauche à droite. On observe que le coût de l'assignement, représenté par la longueur des rectangles colorés sous l'étagère, est inchangé.*

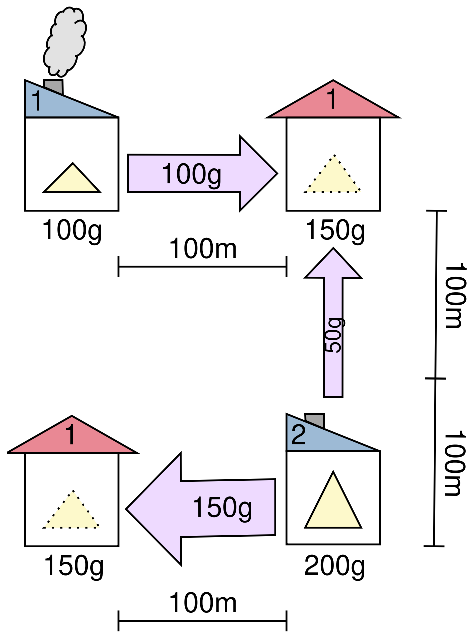
4 Le Problème de Kantorovich

Dans le problème de Monge, nous avons considéré que les unités à déplacer ne sont pas divisibles: il était interdit de couper une baguette en deux ou de déplacer une partie d'un livre. Le mathématicien Leonid Kantorovich a redécouvert le problème de Monge en 1942 [Kan42], dans lequel il a proposé de lever cette contrainte.

En continuant notre analogie des boulangeries, cette-fois ci, chaque producteur dispose d'une certaine quantité de produit à vendre (par exemple 10kg de farine), et chaque domicile souhaite en acheter une certaine quantité (par exemple 1kg de farine), de sorte que la quantité totale disponible soit égale à la quantité totale demandée. L'objectif est de minimiser le coût total de déplacement: par exemple déplacer 1kg de farine sur une distance de 200m (à vol d'oiseau) coûte 1kg×200m (dans un cadre réel, il y aurait un facteur de proportionnalité qui est sans conséquence ici). Nous représentons ce problème dans la Figure 10a, où nous visualisons un plan de transport particulier. Dans la Figure 10b, nous visualisons un plan de transport optimal entre deux boulangeries disposant de 100g et 200g de farine respectivement livrant deux domiciles en demandant chacun 150g.



(a) *Ici, deux boulangeries disposent de 200g et 250g de farine respectivement, tandis que trois maisons en demandent 100g, 200g et 150g respectivement. Avec les flèches violettes, nous visualisons un plan de transport dictant quelle quantité de farine déplacer depuis chaque boulangerie vers chaque domicile. Par exemple, la boulangerie 1 doit livrer 100g à la maison 1 et 100g à la maison 2.*



(b) *Ici la boulangerie 1 livre 100g de farine à la maison 1 sur 100m, et la boulangerie 2 livre les 50g restants (demandés par la maison 1) sur 200m. La boulangerie 2 livre également 150g de farine à la maison 2 sur 100m, satisfaisant sa demande. Comme la boulangerie 1 est loin de la maison 2, il est préférable de livrer le plus possible (100g) à la maison 1, qui est plus proche.*

Figure 10: *Transport de farine entre boulangeries et maisons.*

Nous calculons maintenant le coût de transport optimal dans l'exemple de la Figure 10b: il s'agit de la somme des coûts de déplacements entre chaque source et sa cible. Par exemple, la boulangerie 1 livre 100g de farine à la maison 1 sur 100m, ce qui cause un coût de $0.1\text{kg} \times 100\text{m} = 10$. Le coût total s'écrit donc:

$$\begin{aligned}\text{Coût-Kantorovich}\Big(\text{boulangeries}, \text{maisons}\Big) &= 0.1\text{kg} \times 100\text{m} + 0.05\text{kg} \times 200\text{m} + 0.15\text{kg} \times 100\text{m} \\ &= 10 + 10 + 15 = 35.\end{aligned}$$

5 Correspondance entre les Problèmes de Kantorovich et de Monge

Le problème de Kantorovich peut être vu comme une généralisation du problème de Monge, où l'on s'autorise à séparer les unités à déplacer. Pour illustrer ceci, nous allons nous faire correspondre un problème de Monge déplaçant des baguettes (qu'on ne peut pas couper) et un problème de Kantorovich déplaçant de la farine (qu'on peut diviser). Dans la Figure 11, nous considérons un exemple où deux boulangeries produisent chacune 1 baguette, et deux maisons en demandent chacun une également. Nous comparons ce cas de figure avec deux boulangeries produisant chacune 0.5kg de farine, et deux maisons en demandant chacune 0.5kg.

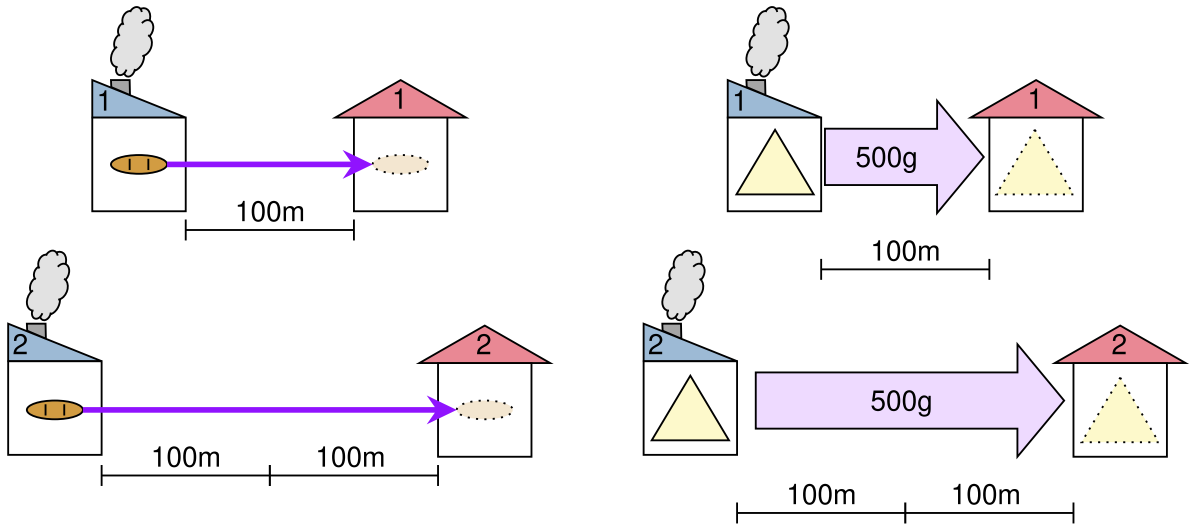


Figure 11: *A gauche, la boulangerie 1 livre 1 baguette à la maison 1 sur 100m, et la boulangerie 2 livre 1 baguette à la maison 2 sur 200m. A droite, la boulangerie 1 livre 0.5kg de farine à la maison 1 sur 100m, et la boulangerie 2 livre 0.5kg de farine à la maison 2 sur 200m.*

Dans le cas des baguettes (problème de Monge), le coût de transport est la moyenne des distances parcourues par les baguettes, soit:

$$\text{Coût-Monge}\Big(\text{boulangeries}, \text{maisons}\Big) = \frac{100+200}{2} = 150.$$

Dans le cas de la farine (problème de Kantorovich), le coût de transport est la somme des coûts de déplacements entre chaque source et sa cible. Par exemple, la boulangerie 1 livre 0.5kg de farine à la maison 1 sur 100m, ce qui cause un coût de $0.5\text{kg} \times 100\text{m} = 50$. Le coût total s'écrit donc:

$$\begin{aligned}\text{Coût-Kantorovich}\Big(\text{boulangeries}, \text{maisons}\Big) &= 0.5\text{kg} \times 100\text{m} + 0.5\text{kg} \times 200\text{m} \\ &= 50 + 100 = 150.\end{aligned}$$

Nous observons que les coûts sont égaux. Dans notre choix des masses à transporter dans le problème de Kantorovich, nous avons choisi de diviser une unité total de 1kg de farine en deux masses de 0.5kg pour chacune des deux boulangeries, de sorte que chaque boulangerie produise la moité de la quantité totale. Cela permet de faire correspondre les valeurs de coût de transport des problèmes de Kantorovich et de Monge.

La formulation de Kantorovich présenté dans la Figure 11 permet de choisir un plan de transport séparant le paquet de 500g de farine, donc une solution optimale n'a pas de raison particulière de ne pas séparer les paquets. Cependant, nous avons vu une solution optimale ne séparant pas les paquets, donnant une solution où chaque boulangerie ne livre qu'à une seule maison. En général, pour n boulangeries produisant $\frac{1}{n}$kg de farine chacune, et n maisons en demandant $\frac{1}{n}$kg de farine chacune, il existe **toujours** une solution optimale du problème de Kantorovich où chaque boulangerie livre à une seule maison (i.e. pas de séparation des paquets de farine). Ce résultat (non-évident) est fondamental dans la théorie du Transport Optimal.

6 La Distance de Wasserstein

Dans le problème de Kantorovich, nous calculons un coût optimal de déplacement depuis la source vers la cible. Lorsque le coût de déplacement est une distance, la valeur de ce coût est appelée la distance de Wasserstein[1] entre la source et la cible. Cette distance permet en particulier de comparer des objets a priori incomparables, notamment des ensembles de positions que nous ne pouvons comparer que une à une.

Pour illustrer cette notion de comparaison, nous allons considérer trois groupes G_1, G_2, G_3 de deux personnes chacune placée sur une carte: le groupe G_1 est constitué d' Alice et Bob, le groupe G_2 de Camille et David, et le groupe G_3 d'Étienne et Françoise. Nous allons calculer les distances de Wasserstein entre G_1 et G_2, ainsi qu'entre G_1 et G_3, ce qui nous permettra de déterminer si Alice et Bob sont plus près de Camille et David, ou de Étienne et Françoise. Nous commençons par représenter les groupes et les plans de transport optimaux avec les distances associées dans la Figure 12.

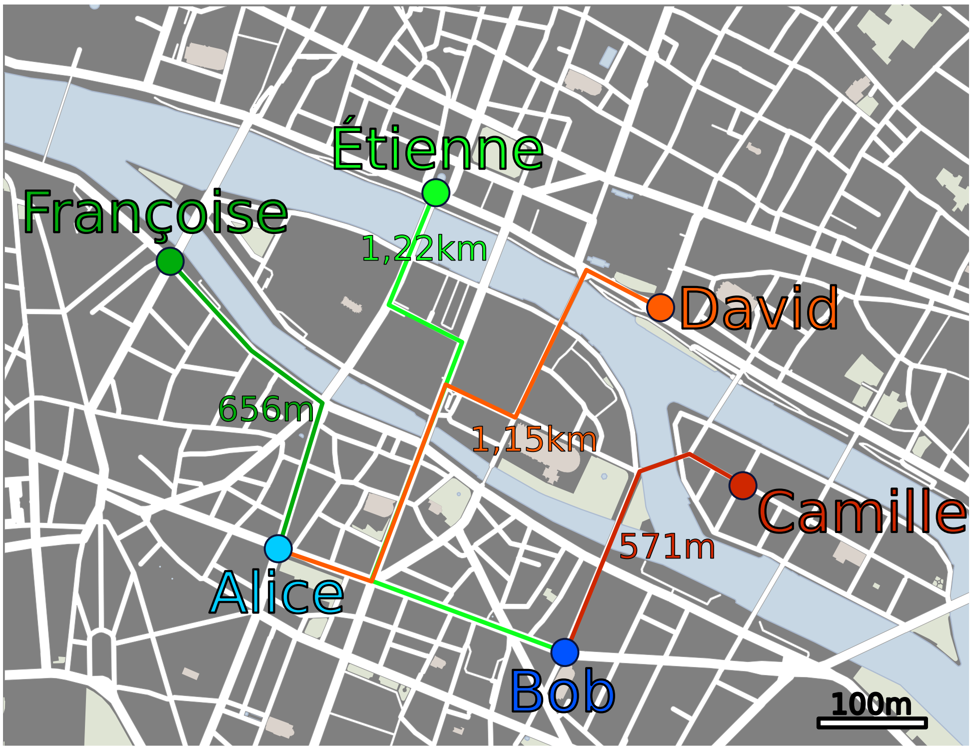


Figure 12: *Représentations des assignements optimaux entre les groupes G_1 (Alice et Bob) et G_2 (Camille et David), et entre G_1 et G_3 (Étienne et Françoise).*

Nous calculons maintenant la distance de Wasserstein entre G_1 et G_2, qui correspond à la moyenne des distances parcourues. Nous avons donc:

$$\mathrm{W}(G_1, G_2) = \frac{1}{2} \times \mathrm{distance}\Big(\mathrm{Alice}, \mathrm{David}\Big) + \frac{1}{2} \times \mathrm{distance}\Big(\mathrm{Bob}, \mathrm{Camille}\Big) = \frac{1150 + 571}{2} \mathrm{m} = 860,5\mathrm{m}.$$

De même, nous calculons la distance de Wasserstein entre G_1 et G_3:

$$\mathrm{W}(G_1, G_3) = \frac{1}{2} \times \mathrm{distance}\Big(\mathrm{Alice}, \mathrm{Françoise}\Big) + \frac{1}{2} \times \mathrm{distance}\Big(\mathrm{Bob}, \mathrm{Étienne}\Big) = \frac{656 + 1220}{2} \mathrm{m} = 938\mathrm{m}.$$

Nous en déduisons que le groupe d'Alice et Bob est plus proche du groupe d'Étienne et Françoise que du groupe de Camille et David, car le groupe d'Alice et Bob est à 850,5m de Camille et David, et à 938m d' Étienne et Françoise.

[1] Rigoureusement, 1-Wasserstein, car la distance est élevée à la puissance 1.

7 Séparation Optimale en Parcelles

Pour l'instant, nous avons toujours considéré des cas où le nombre de points source et cible sont finis, cependant la théorie du Transport Optimal permet également de comparer des objets plus complexes. Pour illustrer cela, nous nous focaliserons sur un exemple. Considérons une affaire d'héritage, où un champ doit être séparé en trois parcelles de même surface entre trois héritiers.ières, qui ont chacun une maison dans ce champ. Notre objectif est de diviser le champ en trois parties équitables de sorte que les points de la parcelle d'Alice soient le plus proche possible de chez elle, et ainsi de suite pour les deux autre héritiers.ières Bob et Camille. Dans la Figure 13, nous illustrons la séparation optimale en parcelles.

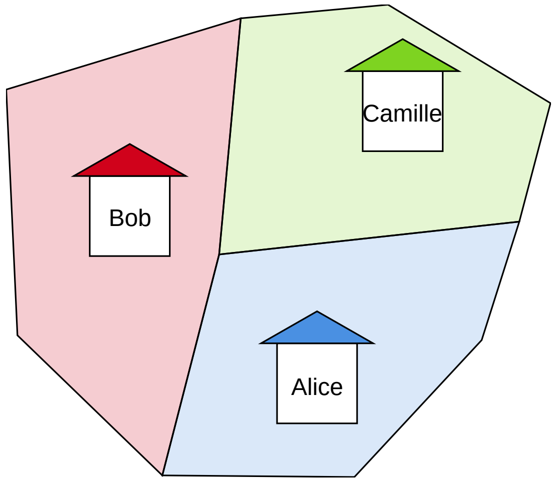


Figure 13: *Séparation d'un champ en trois parcelles de même surface de sorte à minimiser la distance entre chaque parcelle et la maison de son héritiers.ières.*

Auparavant, nous avons vu le transport comme un assignement de points source vers des points cible. Ici, nous assignons à chaque point du champ un.e héritier.ière de sorte à minimiser la somme de toutes les distances entre chaque point et son héritier.ière.

8 Exemple d'Application: Assignement de Projets à des Élèves

Nous nous intéressons maintenant à un exemple concret[2], où un professeur a 6 élèves et 3 projets de cours à leur proposer pour la validation du cours. Pour faciliter la notation et l'organisation des soutenances, le professeur veut absolument avoir 2 élèves par projet. Pour commencer, il demande aux élèves de classer chaque projet de 1 à 3, en fonction de leur préférence. Nous nommons les élèves $E_1, \cdots, E_6$ et les projets P_1, P_2, P_3. A partir d'un vœu de préférence, nous définissions un coût encourageant d'assigner un vœu préféré par l'élève: pour un premier vœu, nous gardons un coût de 1, pour un deuxième vœu, nous augmentons le coût à 3, et pour un troisième vœu, nous augmentons le coût à 10 pour fortement décourager. Nous représentons les vœux et les coûts dans la Figure 14.

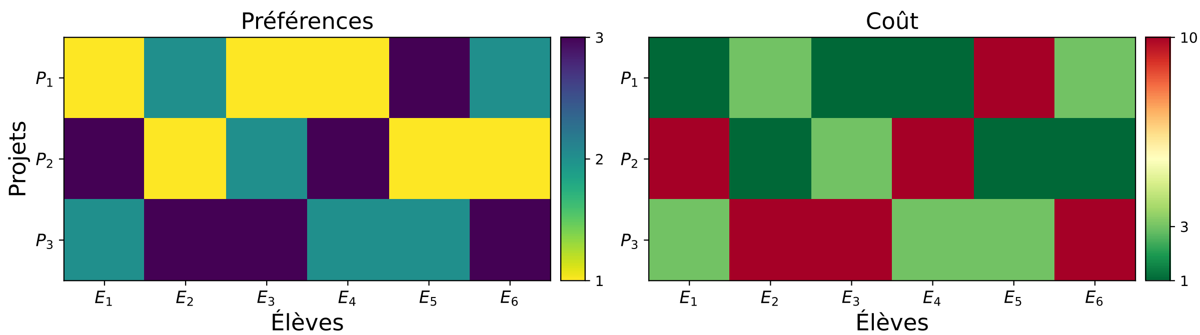


Figure 14: *A gauche, les vœux des élèves pour les projets. Par exemple, l'élève E_1 a classé le projet P_1 en premier, le projet P_2 en troisième et le projet P_3 en deuxième. A droite, le coût de chaque élève pour chaque projet: par exemple, l'élève E_1 a un coût de 1 pour le projet P_1, de 10 pour le projet P_2 et de 3 pour le projet P_3, de sorte à encourager l'assignement du projet P_1 à l'élève E_1, et à fortement décourager l'assignement du projet P_2 à l'élève E_1.*

[2]Dédicace spéciale à Bruno Galerne.

Nous représentons un assignement optimal (calculé numériquement avec la librairie Python de Transport Optimal) entre les élèves et les projets dans la Figure 15.

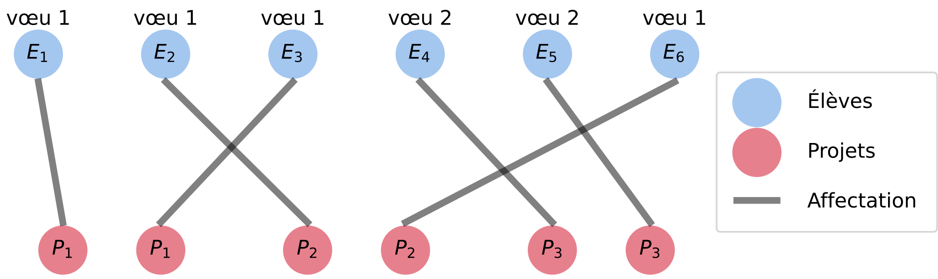


Figure 15: *Assignement optimal entre les élèves et les projets. Nous représentons au-dessus de chaque élève la préférence de son projet attribué, par exemple l'élève E_1 est assigné à son premier vœu P_1.*

Nous voyons que l'élève E_1 est assigné à son premier vœu P_1, mais que l'élève E_4 est assigné à son deuxième vœu P_3. En observant les préférences dans la Figure 14, on remarque qu'il est impossible d'assigner à tout le monde son premier vœu, en revanche notre assignement maximise le contentement des élèves. De plus, comme nous avons mis un coût très fort de 10 sur les troisièmes vœux, notre assignement optimal ne donne aucun troisième vœu à un élève.

9 Exemple d'Application: Transfert de Couleurs

Dans cette section, nous allons voir un exemple d'application du Transport Optimal dans le domaine de l'imagerie. Nous commençons avec deux images I et J représentant un arbre et un champignon violet respectivement, comme représenté dans la Figure 16.

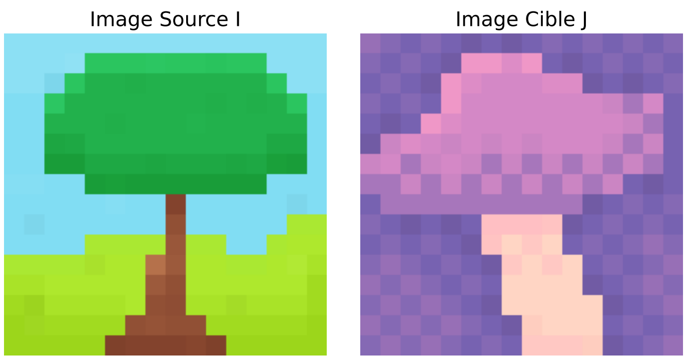


Figure 16: *Deux images I et J représentant un arbre et un champignon violet respectivement.*

Nous avons pris de petites images de 16 pixels par 16 pixels afin de pouvoir visualiser les choses plus facilement. Nous nous intéressons maintenant à la distribution de couleurs de chaque image: l'idée est de voir la couleur de chaque pixel de l'image comme un point tridimensionnel dans l'espace des couleurs Rouge-Vert-Bleu. Par exemple, un pixel de couleur rouge vif est représenté par le point $(1, 0, 0)$, et un pixel de couleur bleu vif est représenté par le point $(0, 0, 1)$. A noter que la position d'un pixel dans l'image d'origine est sans importance, seule sa couleur détermine sa position dans l'espace Rouge-Vert-Bleu. Nous représentons la distribution de couleurs de chaque image dans la Figure 17.

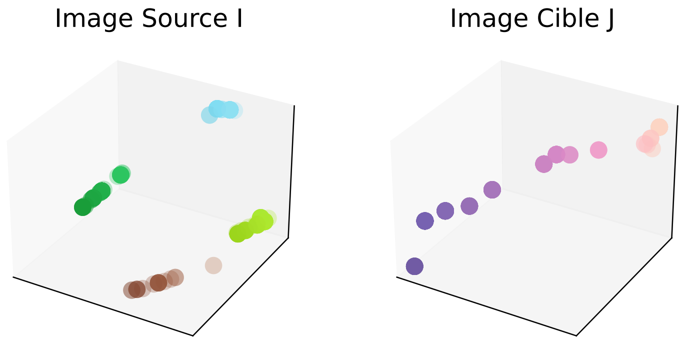


Figure 17: *Distribution de couleurs de chaque image I et J dans l'espace des couleurs Rouge-Vert-Bleu. Chaque pixel de l'image Source I (l'arbre) est représenté par un point dans l'espace tridimensionnel des couleurs à gauche, et pour l'image Cible J (le champignon) à droite. Certains pixels ont exactement la même couleur, et donc sont placés au même endroit dans l'espace des couleurs.*

Nous voyons que l'image d'arbre est principalement verte avec du marron et du bleu, tandis que l'image de champignon est principalement en nuances de violet et de rose. Notre objectif est maintenant de transférer la distribution de couleurs de l'image de champignon vers l'image d'arbre, de sorte à voir l'image d'arbre en nuances de violet et de rose. Pour cela, nous allons assigner chaque pixel de l'image d'arbre à la couleur d'un pixel de l'image de champignon, en minimisant la distance entre les pixels dans l'espace des couleurs. Nous représentons le plan de transport optimal entre les deux distributions de couleurs dans la Figure 18.

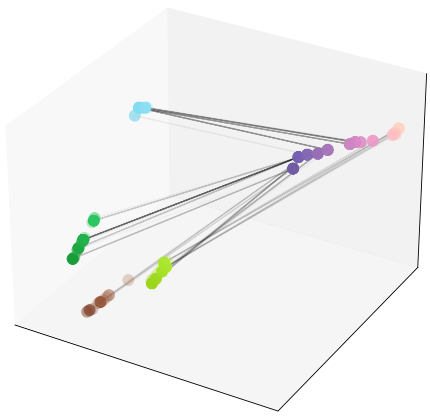


Figure 18: *Plan de transport optimal entre les deux distributions de couleurs dans l'espace des couleurs Rouge-Vert-Bleu. Ce plan est un assignement qui relie chaque pixel de l'image d'arbre (vert, bleu ou marron) à un pixel de l'image de champignon (violet ou rose).*

A l'aide de cette correspondance entre pixels, nous allons transférer la couleur de chaque pixel de l'image de champignon sur le pixel de l'image d'arbre qui lui est assigné. Nous représentons l'appariement optimal sur quelques pixels dans Figure 19.

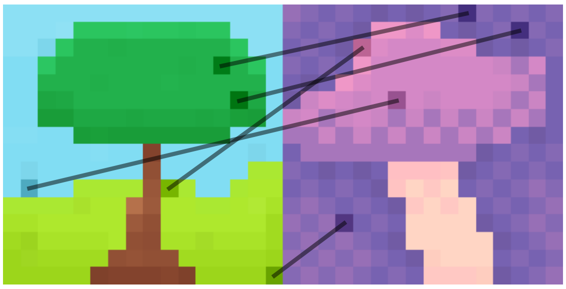


Figure 19: *Appariement optimal sur quelques pixels entre l'image d'arbre et l'image de champignon. La couleur de chaque pixel de l'image d'arbre sera remplacé par le pixel de l'image de champignon qui lui est assigné.*

En déplaçant la couleur de tous les pixels de l'image de champignon vers les pixels de l'image d'arbre qui leur sont assignés, nous obtenons une image d'arbre en nuances de violet et de rose, comme représenté dans la Figure 20.

Figure 20: *Image d'arbre et de champignon de départ, ainsi que l'image d'arbre à laquelle on a transféré la distribution de couleurs de l'image de champignon.*

Comme nous avons imposé la distribution de couleurs de l'image de champignon sur l'image d'arbre, le résultat est assez brutal. Il est possible d'adoucir la transformation en n'allant pas jusqu'au bout de la ligne droite qui relie chaque paire de couleurs de pixels. Dans Figure 21 nous arrêtons le déplacement des couleurs à mi-chemin, et observons la distribution de couleurs résultante.

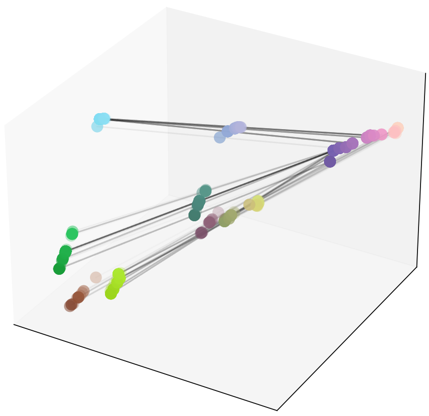


Figure 21: *Distribution de couleurs résultante après avoir arrêté le déplacement des couleurs à mi-chemin. L'assignement de transport optimal définit un trajet en ligne droite entre chaque pixel de l'image d'arbre et son pixel de l'image de champignon associé. Ici, nous arrêtons chaque déplacement au milieu, ce qui nous donne des points de couleur intermédiaires.*

En remplaçant la couleur de chaque pixel de l'image d'arbre par la couleur "à mi-chemin" associée, nous obtenons une image d'arbre avec une distribution de couleurs un peu plus violette et rose, comme représenté dans la Figure 22.

Figure 22: *Image d'arbre et de champignon de départ, ainsi que l'image d'arbre à laquelle on a transféré à mi-chemin la distribution de couleurs de l'image de champignon.*

10 Conclusion de l'Introduction Vulgarisée

Dans cette introduction, nous avons exploré plusieurs concepts du Transport Optimal à travers des exemples simplificateurs. Nous avons vu le problème de Monge avec l'illustration du déplacement de baguettes de pain depuis des boulangeries vers des maisons clientes. Dans le cas unidimensionnel, nous avons visualisé la notion d'appariement optimal par tri de gauche à droite avec des livres sur une étagère. Nous avons ensuite introduit le problème de Kantorovich, qui généralise le problème de Monge en permettant de diviser les unités à déplacer: au lieu de déplacer des baguettes indivisibles, nous avons pris l'exemple de boulangeries livrant de la farine. Nous avons ensuite introduit la notion de distance de Wasserstein, où le coût de transport optimal permet de comparer la distance entre deux groupes d'objets, ici des groupes de deux personnes dans les rues de Paris. Nous avons ensuite vu un exemple de séparation optimale en parcelles, où un champ est séparé en trois parcelles de même surface entre trois héritiers.ières : il s'agit d'un exemple où nous assignons une infinité de points à trois héritiers.ières, cela donne un aperçu de la complexité des objets que nous pouvons comparer avec le Transport Optimal. Pour finir, nous avons vu deux exemples simples d'application du Transport Optimal dans le cadre d'assignement de projets à des élèves, et de transfert de couleurs entre deux images.

Dans cette thèse, nous allons explorer des notions mathématiques théoriques plus abstraites sur le Transport Optimal et ses variantes. La plupart des travaux présentés portent sur des garanties théoriques sur des variantes des problèmes de Monge et de Kantorovich, ainsi que sur des algorithmes de résolution efficaces en vue d'applications pratiques. Un principe global à retenir sur le Transport Optimal est que l'on part d'une notion de distance entre objets simples (par exemple la distance à vol d'oiseau entre une boulangerie et une maison), et que l'on résout un problème d'optimisation permettant de comparer des groupes de ces objets simples.

Références

[Kan42] Leonid V Kantorovich. "On the translocation of masses". In: *Dokl. Akad. Nauk. USSR (NS)*. Vol. 37. 1942, pp. 199–201 (cit. on p. 6).

[Mon81] Gaspard Monge. "Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais". In: *Mem. Math. Phys. Acad. Royale Sci.* (1781), pp. 666–704 (cit. on p. 2).

[Vil09] Cédric Villani. *Optimal transport : old and new*. eng. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin: Springer, 2009 (cit. on p. 3).