Mathématiques et Calcul 2 - Chapitre 3

Groupe de TD numéro 10

31 mars 2023

1. Déterminer la nature des intégrales suivantes:

   (a)
   $$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(\frac{1}{\sqrt{t}})}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$$

   (b)
   $$\int_1^{+\infty} t\sin(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $b \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale suivante converge:

   $$\int_1^{+\infty} \frac{(e^{-t+1}-1)e^{-t+1}}{t(t-1)^b}\,\mathrm{d}t$$

   Rappel: $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$

Corrigé

1. Déterminer la nature des intégrales suivantes:

   (a)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(\frac{1}{\sqrt{t}})}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$$

   Correction

   Posons $f : t \mapsto \frac{\arctan(\frac{1}{\sqrt{t}})}{\sqrt{t^2+1}}$ qui est définie, continue et positive sur $[1, +\infty[$.

   $f(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}}}{t} = \frac{1}{t^{3/2}}$ qui est le terme général d'une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 3/2 > 1$) donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge par critère d'équivalence.

   (b)
$$\int_1^{+\infty} t\sin(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   Correction

   Posons $f : t \mapsto t\sin(t)e^{-t}$ qui est définie et continue sur $[1, +\infty[$ mais qui n'est pas de signe constant.

   Pour tout $t \geq 1$, $|f(t)| \leq te^{-t}$ et $\exists T \in [1, +\infty[$ tel que pour tout $t > T$, $e^{-t} \leq \frac{1}{t^3}$. Dans ce cas, $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ qui est le terme générale d'une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$) donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument par critère de majoration et donc converge.

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $b \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale suivante converge:
$$\int_1^{+\infty} \frac{(e^{-t+1}-1)e^{-t+1}}{t(t-1)^b}\,\mathrm{d}t$$

   Correction

   Posons $f : t \mapsto \frac{(e^{-t+1}-1)e^{-t+1}}{t(t-1)^b}$ qui est définie, continue et négative sur $]1, +\infty[$ pour tout $b \in \mathbb{R}$. On introduit donc la fonction g définie, pour tout $t \in]1, +\infty[$, par $g(t) = -f(t)$. g est donc définie, continue et positive sur $]1, +\infty[$.

   $I = \int_1^2 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$

   - Au voisinage de $+\infty$:
     On a $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t+1}}{t^{b+1}} = h(t)$. Or, $\exists T \in [2, +\infty[$ tel que pour tout $t > T$, $e^{-t} \leq \frac{1}{t^{1-b}}$. Dans ce cas, $h(t) \leq \frac{e}{t^2}$ qui est le terme général

d'une intégrale de Riemann convergente. Ainsi, par critère de majoration $\int_2^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et par critère d'équivalence $\int_2^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $b \in \mathbb{R}$. Donc $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $b \in \mathbb{R}$.

- Au voisinage de 1:
  On se ramène à une borne impropre en 0 par changement de variable:
  Variable actuelle: $t \in]1, 2]$, $t \geq 1$.
  Nouvelle variable: $s \geq 0$
  $t \geq 1 \iff t - 1 \geq 0$, on pose $s = t - 1$.
  Soit $x \in]1, 2]$, posons $F(x) = \int_x^2 g(t)\,\mathrm{d}t$.
  Donc $F(x) = \int_x^2 \frac{(1-e^{-t+1})e^{-t+1}}{t(t-1)^b}\,\mathrm{d}t = \int_{x-1}^1 \frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{(s+1)s^b}\,\mathrm{d}s \underset{x\to 1}{\to} \int_0^1 \frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{(s+1)s^b}\,\mathrm{d}s$
  Pour tout $s \in]0, 1]$, posons $h(s) = \frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{(s+1)s^b} \underset{s\to 0}{\sim} \frac{s}{s^b} = \frac{1}{s^{b-1}}$ qui est le terme général d'une intégrale de Riemann convergente ssi $b - 1 < 1$. Donc, d'après le critère d'équivalence, $\int_0^1 h(s)\,\mathrm{d}s = \int_1^2 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge ssi $b < 2$. Ainsi, $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ssi $b < 2$.
- Conclusion: I converge ssi $b < 2$.