Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Interrogation 2 : Intégrales et Primitives

Exercice 1. /4

1. Déterminer le domaine D sur lequel $t \longmapsto \dfrac{e^{2t}}{e^{4t}-3e^{2t}+2}$ admet des primitives. /1

Soit $F(x) := \displaystyle\int_c^x \frac{e^{2t}}{e^{4t}-3e^{2t}+2}\mathrm{d}t$ pour $x, c \in J$, où J est un intervalle de D.

2. A l'aide de changement(s) de variables, exprimer $F(x)$ sous la forme $\alpha \displaystyle\int_a^b \frac{1}{u^2-3u+2}\mathrm{d}u$. /1

3. Calculer $\alpha \displaystyle\int_a^b \frac{1}{u^2-3u+2}\mathrm{d}u$, et en déduire l'ensemble des primitives de $t \longmapsto \dfrac{e^{2t}}{e^{4t}-3e^{2t}+2}$ sur J. /2

Correction.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{4t}-3e^{2t}+2=0 \iff e^{2t}=1$ ou $e^{2t}=2 \iff t \in \{0, \ln(2)/2\}$.

On en déduit que $f := t \longmapsto \dfrac{e^{2t}}{e^{4t}-3e^{2t}+2}$ est continue et donc admet des primitives sur $D :=]-\infty, 0[\cup]0, \ln(2)/2[\cup]\ln(2)/2, +\infty[$.

2. On effectue le changement de variables $u = e^{2t}$, donnant $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{2u}$: $F(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{e^{2c}}^{e^{2x}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-3u+2}$.

3. On décompose en éléments simples $\dfrac{1}{u^2-3u+2} = \dfrac{1}{(u-1)(u-2)} = \dfrac{1}{u-2} - \dfrac{1}{u-1}$, ainsi

$$F(x) = \frac{1}{2}[\ln|u-2| - \ln|u-1|]_{e^{2c}}^{e^{2x}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-e^{2x}}{1-e^{2x}}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-e^{2c}}{1-e^{2c}}\right|.$$

L'ensemble des primitives voulu est donc l'ensemble des $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2-e^{2x}}{1-e^{2x}}\right| + K,\ K \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. /3

Justifier l'existence de $I := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{6+4\cos t-\sin^2 t}\mathrm{d}t$,

puis la calculer au moyen du changement de variables $u = \cos t$.

Correction.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $4\cos(t) - \sin^2(t) \in [-5, 5]$, donc le dénominateur ne s'annule pas. Comme fraction rationnelle en cos et sin sans pôle, l'intégrande est continue, donc I est bien définie.

Avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on réécrit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos^2 t + 4\cos t + 5} \mathrm{d}t$.

Pour le changement de variables, on a $u = \cos t$ donne $\mathrm{d}u = -\sin t \mathrm{d}t$, ainsi $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 4u + 5}$.

On réécrit $u^2 + 4u + 5 = (u+2)^2 + 1$, et l'on effectue la translation $s = u + 2$:

$$I = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}s}{s^2 + 1} = \operatorname{Arctan} 3 - \operatorname{Arctan} 2.$$

Exercice 3. /3

1. Soit $S_n := \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n+k}\right)$. Montrer que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \displaystyle\int_0^1 x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right) \mathrm{d}x =: I$. /1

2. Calculer I. /2

Correction.

1. Soit f définie sur $[0, 1]$ par $x \longmapsto x \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$. Par produit et composition, est continue sur $[0, 1]$.

Ainsi, la somme de Riemann $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$ converge vers $I = \displaystyle\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$.

2. On effectue une intégration par partie, en intégrant $u'(x) = x$ et en dérivant $v(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$:

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) \times \frac{1}{1 + 1/(1+x)^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(1/2) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(1/2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(1/2) + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 2|\right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{Arctan}(1/2) + 1 - \ln 5/2\right).
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\dfrac{x^2}{x^2 + 2x + 2} = \dfrac{x^2 + 2x + 2 - (2x+2)}{x^2 + 2x + 2} = 1 - \dfrac{2x+2}{x^2 + 2x + 2}$, et $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)} \mathrm{d}x = \ln|u(x)|$.
