Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2), TD2

MC2 - Changements de Variables : Compléments et Exemples de Rédaction

Pour une fonctions $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, et une autre fonction $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire que φ est dérivable et que φ' est continue), la formule de changement de variables s'écrit

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

En pratique, il existe plusieurs méthodes d'application de cette formule, selon le type d'intégrale à calculer. Les deux versions d'application de la formule sont les suivantes :

— Le cas "explicite" correspond à la situation où on a une intégrale de variable t, et que l'on effectue un changement de variables $t = \varphi(u)$ en appliquant la formule de changements de variables directement. Du point de vue de la formule, cela correspond à aller de la gauche vers la droite. La méthode explicite est généralement facile à justifier rigoureusement.

— Le cas "implicite" correspond à un changement de variables $u = \psi(t)$, et l'on applique la formule de changement de variables à $\varphi := \psi^{-1}$, la fonction réciproque de ψ (pour pouvoir appliquer le théorème dans ce cas, il faut que ψ soit injective.). Ce cas est plus courant, mais il est plus technique en raison de l'inversion de la fonction ψ. D'un point de vue théorique, la méthode implicite avec $\psi(t) = u$ revient exactement à appliquer la méthode explicite avec $t = \psi^{-1}(u)$ (bijection réciproque). Du point de vue de la formule, cela correpond à passer de la droite vers la gauche. La méthode implicite est souvent la plus efficace en pratique.

Pour les examens de MC2, vous pouvez vous concentrer sur la rédation "minimale" dans le cas implicite. Les autres cas vous seront utiles pour bien comprendre les changements de variables et avoir du recul sur les calculs : Sections 1.2.1 et 2.2.1.

1 Exemple 1

Nous allons traiter de manières différentes l'exemple $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t+1}{e^{2t}+3}\mathrm{d}t$. Avant tout, il faut dire que la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{e^t+1}{e^{2t}+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale I existe. Notre objectif est de remplacer les e^t par des u à l'aide d'un changement de variables.

1.1 Version "explicite"

1.1.1 Rédaction minimale (exigible)

On a $I = \displaystyle\int_{\ln(1)}^{\ln(e)} \frac{e^t+1}{e^{2t}+3}\mathrm{d}t$, on effectue le changement de variables $t = \ln(u)$, ce qui donne $\mathrm{d}t = \ln'(u)\mathrm{d}u = \dfrac{1}{u}\mathrm{d}u$:

$$I = \int_{\ln(1)}^{\ln(e)} \frac{e^t+1}{e^{2t}+3}\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{e^{\ln(u)}+1}{(e^{\ln(u)})^2+3}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^e \frac{u+1}{u(u^2+3)}\mathrm{d}u.$$

1.1.2 Rédaction rigoureuse pour lier avec le cours

L'objectif est de faire le changement de variables $t = \ln(u)$ dans l'intégrale I. On pose $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [1, e] & \longrightarrow & [0, 1] \\ u & \longmapsto & \ln(u) \end{array} \right.$, c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et on peut écrire $I = \displaystyle\int_{\ln(1)}^{\ln(e)} \frac{e^t+1}{e^{2t}+3}\mathrm{d}t$, donc par changements de variables, on a $I = \displaystyle\int_1^e f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u = \int_1^e \frac{u+1}{u^2+3} \times \frac{1}{u}\mathrm{d}u$, en utilisant $e^{\ln(u)} = u$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln(u) = \dfrac{1}{u}$.
On conclut $I = \displaystyle\int_1^e \frac{u+1}{u(u^2+3)}\mathrm{d}u.$

1.2 Version "implicite"

1.2.1 Rédaction minimale (exigible)

On effectue le changement de variables $e^t = u$, ce qui donne $e^t\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$, et donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{u}\mathrm{d}u$. Pour les bornes, on calcule $e^0 = 1$ et $e^1 = e$, on obtient $I = \int_1^e \frac{u+1}{u(u^2+3)}\mathrm{d}u$.

1.2.2 Rédaction rigoureuse pour lier avec le cours

L'objectif est de faire le changement de variables $e^t = u$, pour cela on pose $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [1,e] \\ t & \longmapsto & e^t \end{array} \right.$. C'est une bijection (elle est strictement croissante et on a $\psi(0) = 1$ et $\psi(1) = e$), et sa fonction réciproque est $\psi^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [1,2] & \longrightarrow & [0,1] \\ u & \longmapsto & \ln(u) \end{array} \right.$. On remarque que ψ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui permet d'appliquer la formule de changement de variables (avec $\varphi := \psi^{-1}$),

$$I = \int_{\psi(0)}^{\psi(1)} f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t = \int_1^e f(\psi^{-1}(u))(\psi^{-1})'(u)\mathrm{d}u = \int_1^e \frac{u+1}{u(u^2+3)}\mathrm{d}u.$$

2 Exemple 2

Comme précédemment, on effectue des changements de variables sur $J = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin t}{1+\cos t}\mathrm{d}t$, on veut "remplacer le $\cos t$ par u". Avant tout, $\cos -1$ est continue et ne s'annule pas sur $[\pi/4, \pi/3]$, donc $g : t \longmapsto \frac{\sin t}{1+\cos t}$ est continue sur $[\pi/4, \pi/3]$, ainsi J est bien définie. comme souvent, les deux méthodes sont possibles, et ici la méthode implicite (2.2.1) est beaucoup plus facile.

2.1 Version "explicite"

2.1.1 Rédaction minimale (exigible)

On fait le changement de variables $t = \varphi(u) = \mathrm{Arccos}(u)$, en remarquent $\pi/3 = \varphi(1/2)$ et $\pi/4 = \varphi(\sqrt{2}/2)$:

$$J = \int_{\mathrm{Arccos}(\sqrt{2}/2)}^{\mathrm{Arccos}(1/2)} \frac{\sin t}{1+\cos t}\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{\sin(\mathrm{Arccos}(u))}{1+u} \times \mathrm{Arccos}'(u)\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u} \times \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u,$$

où l'on a utilisé $\mathrm{Arccos}'(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ valable pour $u \in]-1,1[\supset [1/2, \sqrt{2}/2]$, $\cos(\mathrm{Arccos}(u)) = u$ valable pour tout $u \in [-1,1] \supset [1/2, \sqrt{2}/2]$ et $\sin(\mathrm{Arccos}(u)) = \sqrt{1-u^2}$, vrai pour $u \in [-1,1] \supset [1/2, \sqrt{2}/2]$.

2.1.2 Rédaction rigoureuse pour lier avec le cours

On fait le changement de variables $t = \mathrm{Arccos}(u)$, pour cela on pose $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [1/2, \sqrt{2}/2] & \longrightarrow & [\pi/4, \pi/3] \\ u & \longmapsto & \mathrm{Arccos}(u) \end{array} \right.$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, car Arccos l'est sur $]-1,1[\supset [1/2, \sqrt{2}/2]$. On a $\pi/3 = \varphi(1/2)$ et $\pi/4 = \varphi(\sqrt{2}/2)$ par définition de Arccos. De plus, avec la formule $\mathrm{Arccos}'(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ valable pour $u \in]-1,1[\supset [1/2, \sqrt{2}/2]$ et avec la formule $\cos(\mathrm{Arccos}(u)) = u$ valable pour tout $u \in [-1,1] \supset [1/2, \sqrt{2}/2]$, la formule de changement de variables donne

$$J = \int_{\mathrm{Arccos}(\sqrt{2}/2)}^{\mathrm{Arccos}(1/2)} \frac{\sin t}{1+\cos t}\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{\sin(\mathrm{Arccos}(u))}{1+u} \times \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u.$$

Puis pour $u \in [\sqrt{2}/2, 1/2]$, on a $\sin(\mathrm{Arccos}(u)) = \sqrt{1-u^2}$, ce qui donne

$$J = -\int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u} \times \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u.$$

2.2 Version "implicite"

2.2.1 Rédaction minimale (exigible)

On effectue le changement de variables $\cos t = u$, ce qui donne $-\sin t\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$, le terme de gauche $-\sin t\mathrm{d}t$ est l'opposé du numérateur dans l'intégrale J ! Ensuite pour les bornes, on calcule $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et $\cos(\pi/3) = 1/2$, ce qui donne

$$J = \int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{-\,\mathrm{d}u}{1+u} = \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\mathrm{d}u}{1+u}.$$

2.2.2 Rédaction rigoureuse pour lier avec le cours

On fait le changement de variables $\cos t = u$, pour cela on pose $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} [\pi/4, \pi/3] & \longrightarrow & [1/2, \sqrt{2}/2] \\ t & \longmapsto & \cos t \end{array} \right.$. La fonction ψ est bijective, car cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et que $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et $\cos(\pi/3) = 1/2$, puis la fonction réciproque de ψ est $\psi^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [1/2, \sqrt{2}/2] & \longrightarrow & [\pi/4, \pi/3] \\ u & \longmapsto & \mathrm{Arccos}(u) \end{array} \right.$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ car Arccos l'est sur $]-1,1[\supset [1/2, \sqrt{2}/2]$. On applique la formule de changement de variables avec $\varphi := \psi^{-1}$, en utilisant la formule $\mathrm{Arccos}'(u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ valable pour $u \in]-1,1[\supset [1/2, \sqrt{2}/2]$, la formule $\cos(\mathrm{Arccos}(u)) = u$ valable pour tout $u \in [-1,1] \supset [1/2, \sqrt{2}/2]$, et la formule $\sin(\mathrm{Arccos}(u)) = \sqrt{1-u^2}$ qui est vraie pour $u \in [-1,1] \supset [\sqrt{2}/2, 1/2]$:

$$J = \int_{\psi(\pi/4)}^{\psi(\pi/3)} \frac{\sin(\mathrm{Arccos}(u))}{1+u} \times \frac{-\,1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u.$$