Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2), TD2

Interrogation 3 : Primitives et Intégrales Impropres (30min)

Exercice 1. 6pts

1. Décomposer $\dfrac{2}{u^2(u^2+2u+2)}$ en éléments simples en mettant les éléments simples au même dénominateur pour déterminer les coefficients. (2pts)

2. Déterminer les primitives de $f : t \longmapsto \dfrac{2}{2e^{2t}+e^{3t}+2e^{t}}$. (4pts)

Correction.

1. On effectue la décomposition en éléments simples : il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $u \neq 0$:

$$\frac{2}{u^2(u^2+2u+2)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u^2} + \frac{cu+d}{u^2+2u+2},$$

En mettant le membre de droite au même dénominateur et en identifiant au dénominateur du membre de gauche, on obtient

$$2 = 2b + u(2a+2b) + u^2(2a+b+d) + u^3(a+c),$$

puis en identifiant les coefficients des polynômes dans l'équation précédente, on détermine successivement $b = 1, a = -1, d = 1$ et $c = 1$. (2pts)

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas) (0.5pts), soit donc $x \in \mathbb{R}$, nous effectuons le changement de variables (1pt) $u = e^t$, ce qui donne $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/u$:

$$F(x) := \int_0^x \frac{2\mathrm{d}t}{2e^{2t}+e^{3t}+2e^{t}} = \int_1^{e^x} \frac{2\mathrm{d}u}{u^2(u^2+2u+2)}.$$

A l'aide de la décomposition en éléments simples de la question précédents, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_1^{e^x} \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^{e^x} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} + \frac{1}{2}\int_1^{e^x} \frac{2u+2}{u^2+2u+2}\mathrm{d}u \\ &= -\left[\ln(u)\right]_1^{e^x} + \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{e^x} + \frac{1}{2}\left[\ln(u^2+2u+2)\right]_1^{e^x} \\ &= -x - e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2e^x+2) + k, \end{aligned}$$

(2pts) où k est une constante réelle que nous n'avons pas besoin de calculer. On en déduit que l'ensemble des primites de f sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des $\left\{x \longmapsto -x - e^{-x} + \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+2e^x+2) + C \mid C \in \mathbb{R}\right\}$ (0.5pts).

Exercice 2. 5pts L'intégrale $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+2t+1}$ est-elle convergente ? Si oui la calculer.

Rappel : si F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$, alors par définition

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \longrightarrow 0^+} F(x).$$

Correction.

L'intégrande $f : t \longmapsto \dfrac{t}{2t^2+2t+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (0.5pts). Ensuite on remarque que f est positive (0.5pts) avec $f(t) \underset{t\longrightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t^2}$ (0.5pts), or l'intégrale de Riemann (0.5pts) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge $(2>1)$, donc par critère d'équivalence (0.5pts) I est convergente (0.5pts).

Pour calculer I, on calcule pour $x \in \mathbb{R}_+$: (1pt)

$$F(x) := \int_0^x \frac{1}{2t^2+2t+1}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2}{1+(2t+1)^2}\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}(2t+1)]_0^x = \mathrm{Arctan}(2x+1) - \frac{\pi}{4}.$$

Puis $I = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$ (1pt).

Exercice 3. 4pts

Déterminer la nature de $J := \displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)\mathrm{d}t}{(e^t-1-t)^{18}}$.

Indication : pour la borne en 0, on pourra calculer un équivalent à l'aide d'un développement limité de e^t.

Correction.

Soit $f : t \longmapsto \dfrac{-\ln(t)}{(e^t-1-t)^{18}}$, f est continue sur $]0,1]$ (0.5pts), étudions donc le comportement de f au voisinage de 0. On a $e^t = 1+t+t^2/2+o_{t\longrightarrow0}(t^2)$, donc $f(t) \underset{t\longrightarrow0^+}{\sim} -\dfrac{2^{18}\ln(t)}{t^{36}}$ (1pt). Ensuite, $-\ln(t) \xrightarrow[t\longrightarrow0^+]{} +\infty$, donc il existe $T>0$ tel que $\forall t \in]0,T]$, $f(t) \geq 2^{18}/t^{36}$. (1pt). Comme $2^{18}/t^{36} \geq 0$ (0.5pt) et que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 t^{-36}\mathrm{d}t$ diverge $(36 \geq 1)$, le critère de comparaison (0.5pt) montre que J diverge (0.5pt).
