Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2), TD2

Interrogation 1 : Algèbre Linéaire (40min)

Exercice 1. 6pts Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y \\ y-2z \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est une application linéaire. (1pt)
2. Est-ce que f est une forme linéaire ? Est-ce que f est un endomorphisme ? Est-ce que f est un isomorphisme ? (Dire pourquoi rapidement pour chaque) (1.5pts)
3. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. (1.5pts)
4. Déterminer le rang de f. (1pt)
5. Donner la matrice de f dans les bases canoniques. (1pt)

Correction.

1. Soit $u := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $u' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. On a

$$f(u+u') = f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x'-y-y' \\ y+y'-2z-2z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'-y' \\ y'-2z' \end{pmatrix} = f(u)+f(u').$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda u) = \begin{pmatrix} \lambda x - \lambda y \\ \lambda y - 2\lambda z \end{pmatrix} = \lambda f(u)$, donc f est linéaire.

2. f n'est pas une forme linéaire car son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}$. f n'est pas un endormorphisme car son ensemble de départ $\mathbb{R}^2$ n'est pas le même que son ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^3$. f n'est pas un isomorphisme car $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

3. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x-y & = & 0 \\ y-2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2z \\ y & = & 2z \end{array} \right.$$
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

4. Par le Théorème du rang, $\operatorname{rang} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(f) = 3 - 1 = 2$.

5. La matrice dans les bases canoniques de f est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. 6pts Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction.

On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|cccl} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|cccl} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|cccl} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 3 & -3/2 & 1 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|cccl} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/3 & 1/3 & L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|cccl} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/3 & 1/3 & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|cccl} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -2/3 & 1/3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/3 & 1/3 & \end{array}\right.$$

Nous trouvons donc $\begin{pmatrix} 1/2 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ -1/2 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. 6pts Calculer les déterminants :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1500 & 1503 & 1 \\ 500 & 506 & 2 \\ 2000 & 2007 & 2 \end{vmatrix}, \quad d_4 = \begin{vmatrix} t & -t & t^2 \\ 0 & 2 & 2t \\ t & 7 & 3t \end{vmatrix}, \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

Correction.

- On remarque la relation de liason suivante entre les colonnes : $C_2 = C_1 + C_3$, donc $d_1 = 0$.
- En développant par rapport à la deuxième ligne, on trouve $d_2 = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times (1-2) = 2$.
- On effectue l'opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 - C_1 - 3C_3$: $d_3 = \begin{vmatrix} 1500 & 0 & 1 \\ 500 & 0 & 2 \\ 2000 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, puis on factorise la première colonne par 500 : $d_3 = 500\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, et on développe par rapport à la deuxième colonne : $d_3 = 500 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -500 \times (6-1) = -2500$.
- En factorisant par t dans la première ligne puis dans la troisième colonne, on a

$$d_3 = t\begin{vmatrix} 1 & -1 & t \\ 0 & 2 & 2t \\ t & 7 & 3t \end{vmatrix} = t^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ t & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne,

$$d_3 = t^2\left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) = t^2(6 - 14 + t(-2-2)) = -t^2(8+4t).$$
